

AUTÓMATAS Y LENGUAJES

LENGUAJES REGULARES- Lema de Pumping - AÑO 2024

LIC. EN CS. DE LA COMPUTACIÓN - 4to. AÑO

Lenguajes No Regulares

La clase de hoy comenzaremos un tema nuevo que nos permitirá visualizar, después de haber estudiado LR, como se puede ver que un lenguaje no lo es. ¿Por qué queremos estudiar esto?

Para avanzar con el estudio de la Jerarquía de Chomsky, que como dijimos en la primera clase del curso, es nuestro desafío.

Pregunta: ¿recuerdan la Jerarquía de Chomsky?



Según lo estudiado previamente, la clasificación de Chomsky, da la siguiente jerarquía de lenguajes, donde \mathcal{L}_i denota la familia de lenguajes Tipo i :

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

Análisis de Lenguajes

Pensemos ahora, construir (si es posible) un AFD, que reconozca uno de cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* | w \text{ tiene igual número de } 0\text{'s que de } 1\text{'s}\}$
3. $L_3 = \{ww^T | w \in \{a, b\}^*\}$
4. $L_4 = \{a^i b^j | i \geq j\}$

¿A qué conclusión arribamos para cada caso?

Vamos a estudiar, a continuación, una herramienta que va a permitirnos determinar si un lenguaje dado no es regular:



Lema de Pumping

Enunciado

Teorema: (El lema de pumping para LR) Sea L un lenguaje regular. Entonces existe una constante n (que depende de L) tal que para toda cadena $w \in L$ con $|w| \geq n$, podemos subdividir w en tres subcadenas $w = xyz$, tal que:

1. $y \neq \lambda$.
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0$, la cadena xy^kz está también en L .

Lema de Pumping

Demostración



Supongamos que L es regular, entonces $L = L(A)$ para algún AFD A . Supongamos además que A tiene n estados.

Consideremos cualquier cadena w de longitud n o más, digamos $w = a_1 a_2 \dots a_m \in L$, con $m \geq n$ y cada a_i un elemento del alfabeto de entrada.

Como $w \in L$, el autómata A acepta w , por lo tanto consideremos la secuencia de transiciones que recorre A para aceptar w :

$$p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Esta cadena tiene $m + 1$ estados, como A tiene n estados distintos y $m + 1 > n$, vemos que en dicha secuencia existe un estado repetido.

Lema de Pumping

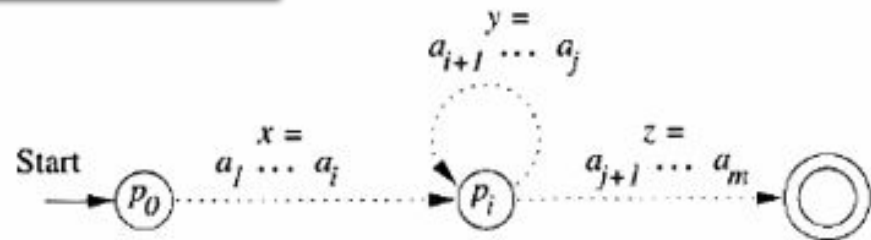
Demostración (Cont.)

Esto lo asegura el **principio de las casillas**: no es posible que los $m + 1$ estados sean distintos, dado que hay solo n estados diferentes.

Principio de las Casillas: si $n + 1$ objetos son colocados en n cajas, entonces al menos una caja contiene dos o más objetos.

Ahora podemos descomponer $w = xyz$ como sigue:

1. $x = a_1 a_2 \dots a_i$,
2. $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$,
3. $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$



Lema de Pumping

Demostración (Cont.)

¿Qué sucede si el autómata A recibe la entrada xy^kz para cualquier $k \geq 0$? Si $k = 0$, entonces el autómata va desde el estado p_0 a p_i para la entrada x . Dado que p_i es también p_f , entonces A irá desde p_i al estado de aceptación para la entrada z . Por lo tanto A acepta xz .

Si $k > 0$, entonces A va desde p_0 a p_i para la entrada x , se mantiene de p_i a p_i para la entrada y^k por el paso que vuelve a p_i , y entonces arriba al estado final para la entrada z .

Por lo tanto, para cualquier $k \geq 0$, xy^kz es también aceptado por A , o de manera similar, xy^kz está en L .

1. $y \neq \lambda$.
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0$, la cadena xy^kz está también en L .

Lema de Pumping

Uso práctico

Dado que para todo lenguaje regular infinito se cumple el lema de pumping, si nos dan un lenguaje infinito y demostramos que para él no se cumple, habremos demostrado que no es un lenguaje regular.

Como el lema de pumping es una propiedad que se cumple para todas las cadenas de longitud mayor o igual a cierto n , bastará encontrar una cadena de ese lenguaje, de longitud mayor o igual a esa n , que no se pueda bombear para demostrar que el lenguaje no es regular.

Con esta idea en mente, los pasos a dar para demostrar que un lenguaje dado no es regular son los siguientes:

Lema de Pumping

Uso práctico

1. Asumir que el lenguaje dado es regular.

2. Elegir una palabra w que pertenezca al lenguaje, pero debe ser una cuya longitud sea $\geq n$ (n la constante del lema).

No siempre es sencillo hallar la cadena w

3. El lema dice que si el lenguaje fuera regular, podríamos encontrar una forma de subdividir w en tres subcadenas xyz , cumpliendo las restricciones 1) y 2). Como queremos demostrar que el lenguaje no es regular, tendremos que demostrar que no hay ninguna forma de subdividir w , cumpliendo las restricciones del lema, y que después se pueda repetir (pampear, bombear) y en función del valor k (la tercera condición del lema).

Lema de Pumping

Uso práctico

4. Bastará con encontrar una constante $k \geq 0$ que haga que ninguna de las particiones posibles de w sea bombeable.

5. Por último si para **toda** descomposición de la cadena se halló un k , que hace que cada una de las cadenas resultantes no pertenezca al lenguaje, concluimos que arribamos a una contradicción, que surge de haber asumido que el lenguaje era regular.

Lema de Pumping

Un primer Ejemplo

Mostrar usando el Lema de Pumping que el lenguaje $L = \{a^p b^p / p \geq 0\}$ no es regular:

1º Asumimos que L es regular, por lo tanto existe el número n , dado por el lema.

2º Tomemos la cadena $w = a^n b^n$, con $|w| = 2n$, es decir se cumple que $|w| \geq n$.

3º Analicemos todas las posibles formas de subdividir w ($w = xyz$), *recordar que las descomposiciones tienen que cumplir las primeras 2 condiciones del Lema:*

1. $y \neq \lambda$.
 2. $|xy| \leq n$
 3. $\forall k \geq 0$, la cadena $xy^k z$ está también en L .
-

Lema de Pumping

Un primer Ejemplo (Cont.)

Caso 1: la cadena **y** consiste solamente de a's, $y = a^t$, ($t \geq 1, t \leq n$)

Gráficamente:



Si tomamos $k = 0$, como $xyz = a^n b^n$, $xz = a^{n-t} b^n$ [$(y^t)^0 = \lambda$], y $n-t < n$, entonces $xz \notin L$.

*Por lo tanto arribamos a una contradicción! Pero esto es considerando a **x** y **z** de qué manera?, por lo que es necesario plantear lo siguiente:*

Pregunta: ¿hay más casos para analizar? ¿Están dadas todas las descomposiciones posibles?

Lema de Pumping

Un primer Ejemplo (Cont.)

Una vez que se analizan todas las posibles descomposiciones de la cadena w y tomando un k que haga que la cadena resultante no pertenezca al lenguaje, es cuando se puede concluir que se llegó a una contradicción y que el lenguaje dado no es regular.

Lema de Pumping

Otro Ejemplo

Mostrar usando el lema que el siguiente lenguaje no es regular:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ tiene igual número de } 0\text{'s que de } 1\text{'s}\}$$

Para utilizar el lema de Pumping para demostrar que L_1 no es regular, partimos asumiendo que lo es, entonces existe n , la constante dada por el lema.

Ahora elijamos una cadena w , perteneciente a L_1 , cuya longitud sea mayor que n , digamos $w = 0^n 1^n$, obviamente esta cadena pertenece al lenguaje.

Lema de Pumping

Otro Ejemplo (Cont.)

Descomponer w en xyz , sabiendo que $y \neq \lambda$ y $|xy| \leq n$. Esto es muy útil, dado que nos permite saber que x e y constan solamente de 0's.

Es decir podemos expresar todas las posibles subdivisiones de w de la siguiente manera:

$$x = 0^r \quad y = 0^s \quad z = 0^{n-r-s}1^n$$

tal que $r \geq 0, s \geq 1, r + s \leq n$

Lema de Pumping

Otro Ejemplo (Cont.)

Ahora elejimos $k = 0$, entonces vemos que xz tiene n 1's, dado que los 1's de w están en z . Pero xz tiene menos de n 0's, porque hemos perdido los 0's de y , esto sucede para cualquier descomposición de la cadena w , recordemos que es necesario considerar todas las posibles descomposiciones, inclusive aquellas en las que z también contiene 0's, de todos modos lo que acabamos de concluir para el valor $k = 0$, también ocurre para estas descompisiciones.

Es decir:

Si tomamos $k = 0$ tenemos: $xy^0z = 0^r \lambda 0^{n-r-s} 1^n = 0^{n-s} 1^n$ y
 $0^{n-s} 1^n \notin L_1$

Lema de Pumping

Otro Ejemplo (Cont.)

Por lo tanto después de asumir que L_1 es regular, hemos llegado a una contradicción, entonces podemos asegurar que L_1 no es regular.



*Habiendo probado para toda
descomposición posible*

Se concluye por contradicción, recordar!

Lema de Pumping

Ejercicio

Demostrar usando el LP que $L_2 = \{ 0^i 1^j / i > j \}$ no es un lenguaje regular:

1. Asumimos que L es regular. Por ende sabemos que existe la constante n .
2. Elijamos $w = 0^{n+1} 1^n$, w tiene que ser de longitud $\geq n$, pero puede suceder que hallar la cadena w no siempre sea sencillo.
3. Descomponer w en todas las posibles descomposiciones xyz , cómo?
4. Para cada descomposición hallar el valor k que haga que la cadena resultante no pertenece al lenguaje.
5. Conclusión

Completar el ejercicio. ¿Qué conclusión puede sacar?

Uso de Propiedades de Clausura y Lema de Pumping

$$A = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$$

Palabras con el mismo número de *as* que de *bs*

- ▶ $A \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- ▶ Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es regular
- ▶ Sabemos que a^*b^* es regular
- ▶ Luego A no es regular

Uso de Propiedades de Clausura y Lema de Pumping

$$A = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Palabras con distinto número de *as* que de *bs*

- ▶ $A^c = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$
- ▶ Hemos visto que $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ no es regular
- ▶ Luego A no es regular

¿DUDAS?

